محاضرة رياضة رقم ١٦

1 Integration around unit Circules :-

$$I = \int_0^{2\pi} f(\sin\theta , \cos\theta)\, d\theta$$

ـ في هذا الجزء نحاول الإستفادة من قواعد تكامل الدوال المركبة بأن نحول بعض الصور القياسية إلى تكاملات يمكن حسابها بقواعد الدوال المركبة وعكس هذه التحويلة لمعرفة التكامل المبسط.

<u>الحالة الأولى</u> :- تكاملات جذورها $(0 \longrightarrow 2\pi)$ وتحتوى على دوال مثلثية فقط.

الفكرة

ـ الحدود من $(0 \longrightarrow 2\pi)$ أنها إذا كانت دائرة تكون قد لفت لفة كاملة فيمكن الدخول للفكرة من هذا المنظور.

$$|z| = 1 \qquad z = e^{i\theta} \qquad \frac{1}{z} = e^{-i\theta}$$

$$z = \cos\theta + i\sin\theta \longrightarrow (1)$$

$$\frac{1}{z} = \cos\theta - i\sin\theta \longrightarrow (2)$$

بجمع (1) ، (2)

$$\boxed{\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \\ \sin\theta &= \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right) \end{aligned}} \longrightarrow *$$

$$z = e^{i\theta} \longrightarrow dz = i e^{i\theta}\, d\theta$$

$$\boxed{d\theta = \frac{dz}{iz}} \longrightarrow (**)$$

ـــ بتعويض من $(* \,،\, **)$ في أي تكامل به $\sin\theta$ ، $\cos\theta$

وحدوده $(0 \leftarrow 2\pi)$ تحول المسألة إلى $\int_{|z|=1} f(z)\,dz$ تحسب

بقانون الـ (Complex).

$\boxed{Ex}$ Evaluate $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2+\sin\theta}$

$\boxed{sol}$

ـــ نحول التكامل إلى "Complex".

$$\sin\theta = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right) \quad ; \quad d\theta = \frac{dz}{iz} \quad ; \quad |z| = 1$$

$$I = \oint_{|z|=1} \frac{\frac{dz}{iz}}{2 + \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)} = \oint_{|z|=1} \frac{dz}{2iz + \frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{2}}$$

$$= \oint_{|z|=1} \frac{2\,dz}{z^2 + 4iz - 1}$$

$$\text{roots} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-4i \pm \sqrt{-16+4}}{2}$$

$Z_0 = -2i + \sqrt{3}\, i$

$Z_0 = (-2+\sqrt{3})\, i$

$|Z_0| = \sqrt{0^2 + (-2+\sqrt{3})^2\, i^2}$

$Z_0 = \sqrt{3} - 2 < 1$

تقع خارج الدائرة

$Z_1 = -2i - \sqrt{3}\, i$

$Z_1 = (-2-\sqrt{3})\, i$

$Z_1 = \sqrt{0^2 + (-2-\sqrt{3})^2\, i^2}$

$Z_1 = 2+\sqrt{3} > 1$

تقع داخل الدائرة

$$I = \oint_{|z|=1} \frac{\frac{2\,dz}{(z-z_1)}}{z-z_0} = 2\pi i \left(\frac{2}{z_0 - z_1}\right) = \frac{4\pi i}{2\sqrt{3}\, i} = \boxed{\frac{2\pi}{\sqrt{3}}}$$

* الأفكار :-

١- عندما تكون زاوية الدوال n أي يظهر في المسألة $\sin n\theta$ ، $\cos n\theta$

والحدود من $0 \leftarrow 2\pi$

$|z| = 1 \Rightarrow z = e^{i\theta}$

$z^n = e^{in\theta}$ ، $z^{-n} = e^{-in\theta}$

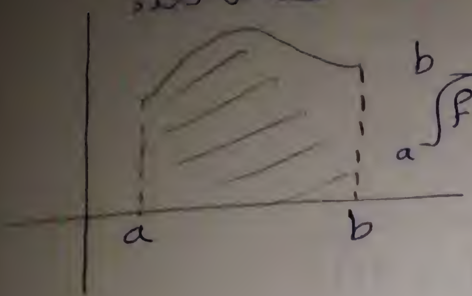
$z^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$

$z^{-n} = \cos(n\theta) - i\sin(n\theta)$

$\cos(n\theta) = \frac{1}{2}\left(z^n + \frac{1}{z^n}\right)$ ، $\sin(n\theta) = \frac{1}{2i}\left(z^n - \frac{1}{z^n}\right)$

$d\theta = \frac{dz}{iz}$

تكامل محدد

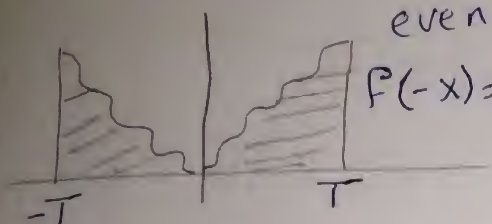


$$\int_a^b f(x)\,dx$$

٢- إذا كانت الحدود من $-2\pi \rightarrow 2\pi$

لابد أن تكون الدالة داخل التكامل زوجية.

$$f(-\theta) = f(\theta)$$

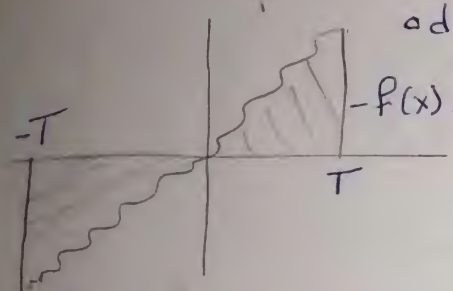


even

$$f(-x) = +f(x)$$

ويكون :

$$\int_{-2\pi}^{2\pi} f(\sin\theta, \cos\theta) = 2\int_{0}^{2\pi} \cdots$$



odd

$$-f(x) = f(-x)$$

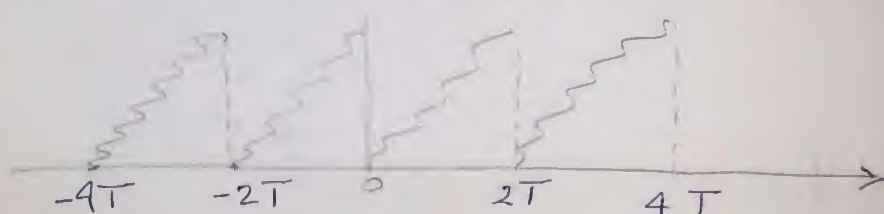
← ولابد أن ننظر على أسس الـ (sine) ولابد أن تكون أسس الـ (sine) زوجية

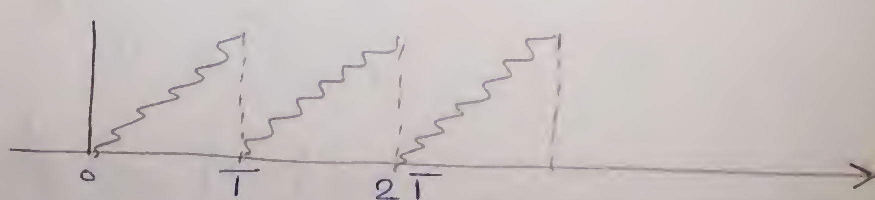
٣- إذا كانت حدود الدالة من ٠ ← π

$$f(x+2T) = f(x)$$

$$f(x+T) = f(x)$$

(even harmonic)

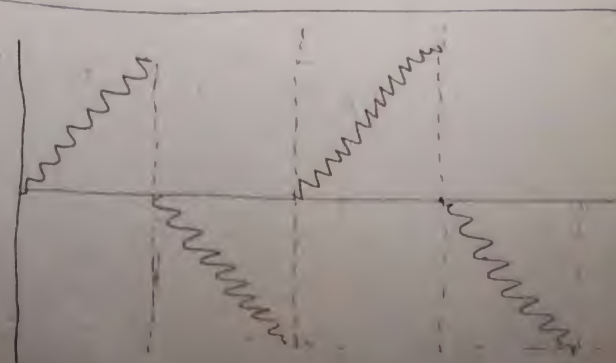




$$f(x+2T) = f(x)$$

$$f(x+T) = -f(x)$$

(odd harmonic)



- إذا كانت حدود التكامل من ٠ ← π فإن:

$$\int_0^{2\pi} f(\sin\theta, \cos\theta)\, d\theta = \begin{cases} 2\int_0^{\pi} f(\sin\theta, \cos\theta)\, d\theta & f(\theta+\pi) = f(\theta) \\ 0 & f(\theta+\pi) = -f(\theta) \end{cases}$$

$\sin(\theta+\pi) = -\sin\theta \quad ; \cos(\theta+\pi) = -\cos\theta$

* $\int_0^{2\pi} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}$ ← إذا كانت جميع أسس $\sin\theta$ ، $\cos\theta$ زوجية.

أو مجموع الأسس في الحدود المضروبة زوجي $(\sin\theta \cos^3\theta)$

$\boxed{Ex}$ **Evaluate** $\quad I = \int_0^{2\pi} \frac{\cos 3\theta}{1-\cos\theta}\, d\theta$

$\boxed{\text{Solution}}$

use: $|z| = 1 \Rightarrow \cos 3\theta = \frac{1}{2}\left(z^3 + \frac{1}{z^3}\right), \cos\theta = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$

$d\theta = \frac{dz}{iz} \qquad \therefore I = \oint_{|z|=1} \frac{\frac{1}{2}\left(z^3 + \frac{1}{z^3}\right)}{1 - \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)} * \frac{dz}{iz}$

$$I = i \oint_{|z|=1} \frac{(z^6+1)}{z^3(z^2-2z+1)}\, dz$$

$$I = i \oint_{|z|=1} \frac{(z^6+1)}{(z-0)^3\,(z-1)^2}\,dz$$

$z=0 \longrightarrow$ is Pole of order 3.

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = \frac{1}{2!} \lim_{z\to 0} \frac{d^2}{dz^2} (z-0)^3 \frac{z^6+1}{z^3(z-1)^2}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{z\to 0} \frac{d}{dz} \frac{(z-1)^2 * 6z^5 - (z^6+1) * 2(z-1)}{(z-1)^4} = \alpha$$

$$\operatorname*{Res}_{z=1} f(z) = \frac{1}{1} \lim_{z\to 1} \frac{d}{dz} (z-1)^2 \frac{z^6+1}{z^3(z-1)^2} = \beta$$

$$I = 2\pi i\,[\alpha + \beta]$$

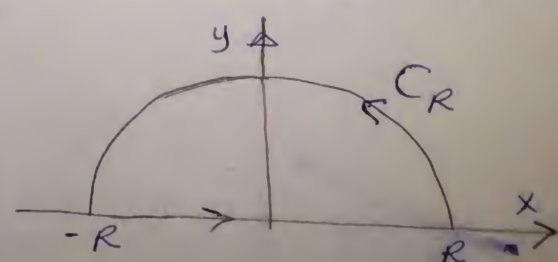
$\boxed{2}$ Integration of form $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$

<u>where</u>: $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$

$\deg[Q(x)] \geq \deg[P(x)] + 2 \longrightarrow$ why?

أصفار المقام لا تقع على محور x

$C = C_R \cup [-R, R]$



$\boxed{6}$ Lec 16

$$\oint_C f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} f(x)\,dx + \int_{C_R} f(z)\,dz$$

← أسلوب التفكير :-

← نحاول تكوين منطقة حدودها منحنى هذا المنحنى جزء منه يعطي رأس المسألة ويمكن حساب تكامل الدوال المركبة عليه.

$$I = I_1 + I_2$$

I ← يحسب بقواعد ال Complex

I_1 ← يعطي الرأس عند $R \to \infty$

$I_2 \to \int_{C_R} f(z)\,dz$

← نستخدم خواص المقياس :-

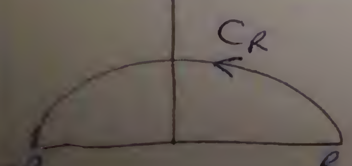
$$|z_1| - |z_2| \leq |z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

← لكي نثبت أنه صفر عند $(R \to \infty)$ لأن درجة المقام أعلى من درجة البسط ونستخدم :-

$$\left|\int_{C_R} f(z)\,dz\right| \leq \int_{C_R} |f(z)|\,|dz|$$

<u>Example</u> Evaluate $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+1}$

← درجة المقام أعلى من درجة البسط في Z فنستخدم :-



<u>أصفار المقام</u>

$$\therefore z^4 + 1 = 0 \Rightarrow z = (-1)^{\frac{1}{4}}$$

$$(x+iy)^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\left(\frac{\theta \pm 2K\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta \pm 2K\pi}{n}\right)\right]$$

$$x=-1,\ y=0 \Rightarrow r=1,\ \theta = \tan^{-1}\frac{0}{-1} = \pi$$

$$(-1)^{\frac{1}{4}} = \cos\left(\frac{\pi+2K\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi+2K\pi}{4}\right),\quad K=0,1,2,\cdots$$

$$K=0 \Rightarrow Z_0 = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$K=1 \Rightarrow Z_1 = \cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4} = \frac{-1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}$$

$$Z_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}},\quad Z_3 = \frac{-1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}$$

← لا يوجد جذور على محور x

$$f(z) = \frac{1}{(z-z_0)(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)}$$

$$\int_C \frac{dz}{z^4+1} = \int_{-R}^{R} \frac{dx}{x^4+1} + \int_{C_R} \frac{dz}{z^4+1}$$

$$I = I_1 + I_2,\quad I = \int_C \frac{dz}{z^4+1}$$

← $\cdot Z_0 , Z_1$ ← تقع داخل Contour .

← Z_2 , Z_3 ← تقع داخل المنحنى .

$$\underset{Z=Z_0}{Res} f(z) = \lim_{Z \to Z_0} (z-z_0) \frac{1}{(z-z_0)(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)}$$

$$= \frac{1}{(z_0-z_1)(z_0-z_2)(z_0-z_3)} = \frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{2i}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{2}{\sqrt{2}}+\frac{2i}{\sqrt{2}}\right)}$$

$$\underset{Z=Z_1}{Res} f(z) = \lim_{Z \to Z_1} (z-z_1) \frac{1}{(z-z_0)(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)}$$

$$= \frac{1}{(z_1-z_0)(z_1-z_2)(z_1-z_3)} = \frac{1}{\left(\frac{-2}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{-2}{\sqrt{2}}+\frac{2i}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{2i}{\sqrt{2}}\right)}$$

$$I = 2\pi i \left(\underset{Z=Z_0}{Res} f(z) + \underset{Z=Z_1}{Res} f(z)\right)$$

as $R \to \infty$

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+1} \quad , \quad I_2 = \int_{C_R} \frac{dz}{z^4+1}$$

← لإثبات أن هذا التكامل = صفر أن نصل إلى أن $0 \leq |I_2|$

ولا يوجد مقياس بالسالب فلا بد أن يكون التكامل بصفر .

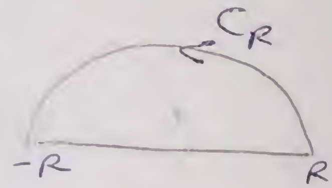
الخطوات 1) أن نوزع المقياس داخل التكامل.

2) أن نحافظ على أقل من . (<)

3) لو إشارة فوق موجب نخليها سالب وإذا كانت سالب نخليها موجب حتى تكون الكمية محافظة على علاقة أقل من (<)

$$|I_2| \leqslant \int_{C_R} \frac{|dz|}{z^4+1} \leqslant \int_{C_R} \frac{|dz|}{|z|^4-1}$$

$$|z| = R \Rightarrow z = Re^{i\theta} \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi$$



$$dz = iR\, e^{i\theta}\, d\theta$$

$$|dz| = \underbrace{|i|}_{1}\, |R|\, \underbrace{|e^{i\theta}|}_{1}\, d\theta$$

$$|dz| = R\, d\theta$$

$$I_2 \leqslant \int_0^{\pi} \frac{R\, d\theta}{R^4-1}$$

$$R \to \infty \quad \Rightarrow \quad \int_0^{\pi} \frac{R}{R^4-1} \longrightarrow 0$$

$$I_2 \leqslant 0 \quad \Rightarrow \quad I_2 = 0$$

$$I_1 = I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+1} = 2\pi i \left(\underset{z=z_0}{Res} + \underset{z=z_1}{Res} \right)$$